

2. Mnohočleny

MNOHOČLENY - tvl. případy výrazů

- PODLE POČTU PROMĚNNÝCH: 1 jedinou proměnnou, se dvěma či více proměnnými

$\textcircled{1}$ $x^2 + 3x - \sqrt{2}$ $x + \pi$ $3x^2 + xy + y^2$ $x^3 - 3xy^2 + z^2$
 A 1 proměnnou u 2 proměnn. u 3 proměnn.

- USPOŘÁDÁNÍ:

- SESTUPNĚ:

$$3x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x + 4$$

- VZESTUPNĚ:

$$4 + 5x - x^2 + 2x^3 + 3x^4$$

$$\left[\begin{array}{l} 3x^4y^3 + 2x^4y + 6x^4y^4 - y^3 \quad (4+3=7 \text{ stupňů}) \\ 2x^4 - 8x^2y^2x - 14x^3 \quad (2+2+1=5 \text{ stupňů}) \end{array} \right]$$

MNOHOČLEN (POLYNOM) S JEDNOU PROMĚNNOU m -LÍHO STUPNĚ

- výraz, který lze kázat v tvaru

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad [a_m \neq 0]$$

člen m -lého stupně

kubický člen

kvadratický člen

lineární člen

absolutní člen

$\textcircled{1}$ $3x^m + 5x^{m-1} + \dots + 8x^3 + 6x^2 + 4x + 5$

$3x^m + 2x^{m-1} + \dots - 4x^3 - 5 \quad [a_3 = -4, a_2 = 0, a_1 = 0, a_0 = -5]$

ČLENY: jednotlivé sčítanci

$$a_k x^k \quad 0 \leq k \leq m$$

KOEFICIENTY: účelná čísla (u proměnných)

$$a_m, a_{m-1}, \dots, a_3, a_2, a_1, a_0 \quad [a_m \neq 0]$$

STUPĚŇ MNOHOČLENU: $m \in \mathbb{N}$

- podle stupně mnohočlenu rozlišujeme mnohočleny:

LINEÁRNÍ (1. stupně): $ax + b$

KVADRATICKÝ (2. stupně): $ax^2 + bx + c$

KUBICKÝ (3. stupně): $ax^3 + bx^2 + cx + d$

NULÉHO STUPNĚ: $a \quad (a \in \mathbb{R} - \{0\})$

NULOVÝ:

0 (nula)

koeficienty samé nuly, stupně se nedefinují, číselná hodnota nikdy nula

$\textcircled{1}$ $x-3 \quad 3x \quad \frac{1}{2}x$
 $3x^2 + 2x + 3 \quad x^2 + 3 \quad x^2 - \frac{x}{3}$

$x^3 \quad 2x^2 + 4x - 3 \quad x^3 - 2x$

$3 \quad -8 \quad \pi$

OPAČNÝ MNOHOČLEN k danému mnohočlenu

- má tytéž členy, ale s opačnými znaménky

- součín 2 navzájem opačných mnohočlenů je nula (nulový mnohočlen)

$\textcircled{1}$ $A(x) = x^5 - 4x^2 - 3x + 1 \Rightarrow$ opačný $B(x) = -A(x) = -x^5 + 4x^2 + 3x - 1$

$$A(x) + B(x) = x^5 - 4x^2 - 3x + 1 + (-x^5 + 4x^2 + 3x - 1) = 0$$

OPERACE

- SČÍTÁNÍ: sčítáme všechny členy (příkladem opět mnohočlen)

$\textcircled{1}$ $(5x^2y - 2xy + 3x + 1) + (x^2y + 3xy + 2) = 6x^2y + xy + 3x + 3$

- ODČÍTÁNÍ: sčítáme mnohočlen opačný (příkladem opět mnohočlen)

$\textcircled{1}$ $5x^2y - 2xy + 3x + 1 - (x^2y + 3xy + 2) = [5x^2y - 2xy + 3x + 1 + (-x^2y - 3xy - 2)] =$

$$= 5x^2y - 2xy + 3x + 1 - x^2y - 3xy - 2 = 4x^2y - 5xy + 3x - 1$$

$$[5x^2y - x^2y = (5-1)x^2y] \quad [-2xy - 3xy = (-2-3)xy = -5xy]$$

- **NÁSOBENÍ** každý člen jednoho mnohočlenů vynásobíme každým členem druhého a získáme součiny sečteme

$$(x^2 + 3x - 2)(2x - 3) = 2x^3 + 6x^2 - 4x - 3x^2 - 9x + 6 = 2x^3 + 3x^2 - 13x + 6$$

$$(2x^3 - x)(x^2 - 2) = 2x^5 - 4x^3 - x^3 + 2x = 2x^5 - 5x^3 + 2x$$

- **UMOCŇOVÁNÍ** (m -tá mocnina, $m \in \mathbb{N}$): převodem na násobení nebo podle mocnů

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

PASCALŮV TROJÚHELNÍK - MOCNINA 3. ROČ. BINOMICKÁ VĚTA

$$m=0 \quad 1$$

$$(a \pm b)^0 = 1$$

$$m=1 \quad 1 \quad 1$$

$$(a \pm b)^1 = a \pm b$$

$$m=2 \quad 1 \quad 2 \quad 1$$

$$(a \pm b)^2 = 1a^2b^0 \pm 2ab^1 + 1a^0b^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$m=3 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$(a \pm b)^3 = 1a^3b^0 \pm 3a^2b^1 + 3ab^2 \pm 1a^0b^3$$

$$m=4 \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

$$= a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

...

$$(a \pm b)^4 = 1a^4b^0 \pm 4a^3b^1 + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + 1a^0b^4$$

[u lichých mocninach je \ominus pro b]
[u pár. \ominus pro b]
[u lichých mocninach je \oplus pro b]
[u pár. \oplus pro b]

- čísla v Pasc. Δ udávají koeficienty u členů

$$(x+2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(x-2y)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot (2y) + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 - (2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

- **DĚLENÍ MNOHOČLENŮ**

- **JEDNOČLENEM**: každý člen mnohočlenů dělíme jednočlenem

$$(6x^3y - 2x^2 + x) : 2x = \left[\frac{6x^3y}{2x} - \frac{2x^2}{2x} + \frac{x}{2x} \right] = 3x^2y - x + \frac{1}{2} \quad [x \neq 0]$$

$$(6x^2y - 4xy + 1) : (-2x) = -3xy + 2y - \frac{1}{2x} \quad [x \neq 0]$$

- **MNOHOČLENEM**

$$(3x^3 + 5x^2 - x + 2) : (x+2) = 3x^2 - x + 1$$

$$- (3x^3 + 6x^2)$$

$$\underline{-x^2 - x + 2}$$

$$- (-x^2 - 2x)$$

$$\underline{x + 2}$$

$$- (x + 2)$$

$$\underline{0}$$

$$(x^3 - 5x^2 + 5x - 2) : (x-4) = x^2 - x + 1 + \frac{2}{x-4}$$

$$- (x^3 - 4x^2)$$

$$\underline{-x^2 + 5x - 2}$$

$$- (-x^2 + 4x)$$

$$\underline{x - 2}$$

$$- (x - 4)$$

$$\underline{+2}$$

- podíl mnohočlenů
NEMUSÍ BÝT mnohočlen

NENÍ mnohočlen

NEÚPLNÝ
PODÍL

$$[x-4 \neq 0]$$

$$x \neq 4$$

Přklady

① $(-x)(-x) = x^2$
 $(-2x) \cdot x = -2x^2$
 $(-3a) \cdot 2b = -6ab$
 $4u \cdot (-5v) = -20uv$

$-2(x+y) = -2x - 2y$
 $4(-m+2) = -4m+8 = 8-4m$
 $(2w+3)(-5r) = -10wr - 15r^2$
 $(-k+b) \cdot (-k) = kb - kb$

② $(-3a+4y) \cdot 2ay = -6a^2y + 8ay^2$
 $5c(2m-0,2mv) = 10cm - 1cmv = 10cm - cmv$
 $(x-3)(-2y) = -2xy + 6y = 6y - 2xy$
 $(-ab+4b) \cdot (-a) = a^2b - 4ab$

③ $3(a+b) - 2(a-b) = 3a+3b - 2a+2b = a+5b$
 $(x+y)x - y(x-y) = x^2+xy - xy+y^2 = x^2+y^2$
 $2+5(k-1) - 3k = 2+5k-5-3k = 2k-3$
 $5(u+2v) - (3u-v) \cdot 4 = 5u+10v - 4(3u-v) = 5u+10v - 12u+4v = -7u+14v = 14v-7u$

$= 7(2v-u)$
 $= -7u+14v = 14v-7u$

④ $8(a-m) - 3(a+m) - 4a + 10m = 8a - 8m - 3a - 3m - 4a + 10m =$
 $= 1a - 1m = a - m$

$(-5a) \cdot (-a+b) - a(3+4a-b) = 5a^2 - 5ab - 3a - 4a^2 + ab =$
 $= a^2 - 4ab - 3a$

$3(a+1) - 2(a-1) + \frac{1}{2}(a-10) = 3a+3 - 2a+2 + \frac{1}{2}a-5 = a + \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$

⑤ $8(b-a) - 2[b-3(4-2b)] = 8b - 8a - 2[b-12+6b] =$
 $= 8b - 8a - 2[7b-12] = 8b - 8a - 14b + 24 = -8a - 6b + 24 = -2(4a+3b-12)$

$10x - [2(x+1) - 3(x+1)] + 10 = 10x - [2x+2 - 3x-3] + 10 = 10x - [-x-1] =$
 $= 10x + x + 1 = 11x + 1$

$4x - 3[y+2(x-y) - x] = 4x - 3[y+2x-2y-x] = 4x - 3[x-y] =$
 $= 4x - 3x + 3y = x + 3y$

$5x + 4[3x - x(2+x) + x^2] = 5x + 4[3x - 2x - x^2 + x^2] = 5x + 4(x) = 9x$

⑥ Umocnění

$(2-x)^2 = 4 - 4x + x^2 = x^2 - 4x + 4$

$(3a-b)^2 = 9a^2 - 6ab + b^2$

$(5a+2b)^2 = 25a^2 + 20ab + 4b^2$

$(x^2-y)^2 = x^4 - 2x^2y + y^2$

$(3x^2+2xy)^2 = 9x^4 + 12x^3y + 4x^2y^2$

$(x+2)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 - 1^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$$\textcircled{7} \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(x+3)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 9 + 3^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

$$(x-5)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 5 + 3x \cdot 25 - 5^3 = x^3 - 15x^2 + 75x - 125$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(x-2y)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 2y + 3x \cdot (2y)^2 - (2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$$

$$(2x+y)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot y + 3 \cdot 2x \cdot y^2 + y^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$$

$$\textcircled{8} \quad (6a+2) \cdot (3a-5) = 18a^2 - 30a + 6a - 10 = 18a^2 - 24a - 10$$

$$(6a+2) \cdot 3a - 5 = 18a^2 + 6a - 5$$

$$6a + 2 \cdot 3a - 5 = 6a + 6a - 5 = 12a - 5$$

$$6a + 2(3a-5) = 6a + 6a - 10 = 12a - 10$$

⑨ *Dilw*

$$(15a^4b - 12a^3b^2 - 9a^2b^3 + 6a^4b^2) : 3ab = 5a^3 - 4a^2b - 3ab^2 + 2a^3b$$

$$(8x^4y^2 - 6x^3y^3 + 4x^2y^4 - 2x^2y^4) : (-2x^2y^2) = -4x^2 + 3xy - 2xy^2 + 1$$

$$(4a^5b^2 - 16a^3b + 8a^4b^3 - 4a^5b^5) : 8a^2b^2 = \frac{1}{2} - 2\frac{a}{b} + a^2b - \frac{1}{2}a^3b^3$$

$$(12a^4 - 8a^3 - 4a^4) : 4a^2 = 3a^2 - 2a - 1$$

$$(2m^3 - 4m^2 + 2m - 10) : 2m = m^2 - 2m + 1 - \frac{5}{m}$$

⑩ *Dilw*

a) $(x^3 - x^2 - x - 15) : (x-3) = x^2 + 2x + 5$

$$-(x^3 - 3x^2)$$

$$\underline{2x^2 - x - 15}$$

$$-(2x^2 - 6x)$$

$$\underline{5x - 15}$$

$$-(5x - 15)$$

$$\underline{0}$$

c) $(2x^3 + 7x^2 + 8x + 7) : (x+2) = 2x^2 + 3x + 2$

$$-(2x^3 + 4x^2)$$

$$\underline{3x^2 + 8x + 7}$$

$$-(3x^2 + 6x)$$

$$\underline{2x + 7}$$

$$-(2x + 4)$$

$$\underline{3 \text{ Rest}}$$

$$+ \frac{3}{x+2}$$

b) $(x^3 + 2x + 3) : (x+1) = x^2 - x + 3$

$$-(x^3 + x^2)$$

$$\underline{-x^2 + 2x + 3}$$

$$-(-x^2 - x)$$

$$\underline{3x + 3}$$

$$-(3x + 3)$$

$$\underline{0}$$

d) $(x^3 - 8) : (x-2) = x^2 + 2x + 4$

$$-(x^3 - 2x^2)$$

$$\underline{2x^2 - 8}$$

$$-(2x^2 - 4x)$$

$$\underline{4x - 8}$$

$$-(4x - 8)$$

$$\underline{0}$$

